08年度 ミクロ経済学初級I 練習問題3 解答

石橋 孝次

3. 企業行動

1. (a) 限界生産力は $MP_1 = A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}$, $MP_2 = A\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$ で、限界生産力が逓減するのは $\partial MP_1/\partial x_1 = A\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0$, $\partial MP_2/\partial x_2 = A\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} < 0$ より、$0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ のときである。

(b) 技術的限界代替率は

$$MTS_{12} = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{A\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

であり、x_1 が増加して x_2 が減少すれば MTS_{12} は小さくなるから、技術的限界代替率逓減が成立する。

(c) $f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}f(x_1, x_2)$ より、$\alpha+\beta < 1$ のとき収穫逓減、$\alpha+\beta = 1$ のとき収穫一定、$\alpha+\beta > 1$ のとき収穫逓増となる。

(d) $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ および $\alpha+\beta > 1$ は両立する。

(e) $\alpha > 1$ (もしくは $\beta > 1$) および $\alpha+\beta < 1$ は両立しない。

2. (a) 利潤は $\pi = px_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} - w_1x_1 - w_2x_2$ となる。

(b) 利潤最大化の条件は、$p \cdot MP_1 = w_1$, $p \cdot MP_2 = w_2$ すなわち、

$$\frac{1}{3}px_1^{-\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{3}} = w_1, \quad \frac{1}{3}px_1^{\frac{1}{3}}x_2^{-\frac{2}{3}} = w_2$$

である。(π を x_1 と x_2 で偏微分してゼロとおくことでこの条件を導出せよ。)

(c) (b) の第 1 式の両辺を第 2 式の両辺でそれぞれ割ると、

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}$$

となる。よって $x_2 = \frac{w_1}{w_2}x_1$ となるから、これを (b) の第 1 式に代入すると、

$$\frac{1}{3}px_1^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{w_1}{w_2}x_1\right)^{\frac{1}{3}} = w_1$$

が得られる。これを整理すると、第 1 生産要素の需要関数

$$x_1 = D_1(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{27{w_1}^2w_2}$$

が導出される。さらにこれを $x_2 = \frac{w_1}{w_2} x_1$ に代入すると、第 2 生産要素の需要関数

$$x_2 = D_2(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{27 w_1 {w_2}^2}$$

が得られる。さらにこれらを生産関数 $y = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$ に代入すると、生産物供給関数

$$y = S(p, w_1, w_2) = \left(\frac{p^3}{27 {w_1}^2 w_2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{p^3}{27 w_1 {w_2}^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{p^2}{9 w_1 w_2}$$

が得られる。また、$t > 0$ として

$$D_1(tp, tw_1, tw_2) = \frac{(tp)^3}{27 (tw_1)^2 t w_2} = \frac{p^3}{27 {w_1}^2 w_2} = D_1(p, w_1, w_2)$$

となるから、D_1 は 0 次同次。D_2, S についても同様にすればよい。

(d) (c) で求めた D_1, D_2, S を利潤 $\pi = py - w_1 x_1 - w_2 x_2$ に代入すると、利潤関数

$$\pi(p, w_1, w_2) = \frac{p^3}{27 w_1 w_2}$$

が得られる。1 次同次性は省略。

3. (a) 費用最小化のための条件は

$$MTS_{12} = \frac{\alpha x_1^{\alpha - 1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}$$

である。

(b) (a) の条件 $x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} x_1$ を生産関数に代入すると、

$$y = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} \right)^{1-\alpha} x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_2}{w_1} \right)^{1-\alpha} y = D_1^c(w_1, w_2, y)$$

が得られ、これを x_2 の表現に代入して

$$x_2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} \right)^{\alpha} y = D_2^c(w_1, w_2, y)$$

が得られる。

(c) (b) の結果から、費用関数は

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 D_1^c(w_1, w_2, y) + w_2 D_2^c(w_1, w_2, y) = \left(\frac{w_1}{\alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} y$$

となる。

4. (a) 費用最小化の解は $x_1 = x_2$ によって与えられるから、$D_1^c = D_2^c = y$ となる。したがって、費用関数は $C(w_1, w_2, y) = w_1 D_1^c + w_2 D_2^c = (w_1 + w_2) y$ となる。

(b) 費用最小化の解は $w_1/w_2 > 1$ のとき $x_1 = 0,\ x_2 = y$ で、$w_1/w_2 < 1$ のとき $x_1 = y,\ x_2 = 0$ となる。したがって、$w_1 > w_2$ のとき $w_1 D_1^c + w_2 D_2^c = w_2 y$ で、$w_1 < w_2$ のとき $w_1 D_1^c + w_2 D_2^c = w_1 y$ となるから、費用関数は $C(w_1, w_2, y) = \min\{w_1, w_2\} y$ と表現できる。

5. (a) $MC(y) = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2, \quad AC(y) = 3y^2 - 9y + 9 + \frac{3}{y}$

(b) $AVC(y) = 3y^2 - 9y + 9 = 3(y - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}, \quad AFC(y) = \frac{3}{y}$

(c) 利潤最大化の条件は、$p = MC$ すなわち $9 = 9(y-1)^2$ だから、$y = 2$ である。このときの利潤は、$\pi = 9$ である。

(d) 平均可変費用の最小値は $\frac{9}{4}$ で、$p = MC$ は $y = 1 + \frac{\sqrt{p}}{3}$ と書けるから、供給関数は $p \geq \frac{9}{4}$ のとき $y = 1 + \frac{\sqrt{p}}{3}$ で、$p < \frac{9}{4}$ のとき $y = 0$ となる。

6. (a) 生産関数より、$x_1 = y^2/\overline{x}_2$ が成り立つことに注意すると、短期総費用は

$$STC(y; \overline{x}_2) = w_1 x_1 + w_2 \overline{x}_2 = w_1 \frac{y^2}{\overline{x}_2} + w_2 \overline{x}_2$$

となる。これより、短期限界費用および短期平均費用はそれぞれ

$$SMC = 2w_1 \frac{y}{\overline{x}_2}, \quad SAC = w_1 \frac{y}{\overline{x}_2} + \frac{w_2 \overline{x}_2}{y}$$

となる。

(b) STC を $\overline{x}_2$ に関して最小化するための条件は、

$$\frac{d(STC)}{d\overline{x}_2} = -\frac{w_1 y^2}{(\overline{x}_2)^2} + w_2 = 0$$

である。これを $\overline{x}_2$ について解けば、$\overline{x}_2 = \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} y$ となる。これを STC の表現に代入すると、長期総費用は

$$LTC(y) = w_1 \frac{y^2}{\sqrt{\frac{w_1}{w_2}} y} + w_2 \sqrt{\frac{w_1}{w_2}} y = 2\sqrt{w_1 w_2} y$$

となり、これより $LMC = LAC = 2\sqrt{w_1 w_2}$ となる。（ここでの生産関数は、規模に関する収穫一定である。このときには長期平均費用は一定となる。）